

Урок №6 (22.09.2006)

Теорема Гаусса.

Comment [DA1]: См. «Приложение к журналу «Квант» №5/95. Физика 9-11, выпуск 2», А.Черноуцан, «Силовые линии и теорема Гаусса».

1. Поток вектора напряженности

Введем скалярную величину

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = ES \cos \alpha,$$

– она называется *поток вектора \vec{E} через площадку S* .

Разберемся: густота силовых линий Γ , – это число силовых линий проходящих через *единичную площадку, перпендикулярную* силовым линиям в данной точке, т.е. через площадку S , расположенную под углом α к силовым линиям проходит $N = \Gamma \cdot S \cdot \cos \alpha$ силовых линий. Но $\Gamma \sim E$, следовательно $N \sim \Phi$.

Считаем входящие линии со знаком «-», а выходящие – со знаком «+».

$\Phi = (E \cos \alpha)S = E_n S$, где E_n – проекция вектора \vec{E} на направление нормали \vec{n} .

Если поле создается несколькими зарядами, то $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_k$, но проекция суммы есть сумма проекций: $E_n = E_{1n} + E_{2n} + \dots + E_{kn}$, следовательно

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_k.$$

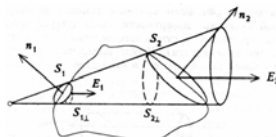
2. Теорема Гаусса

Элементарная формулировка, основанная на понятии силовых линий:

Полное число выходящих из некоторой поверхности силовых линий пропорционально заряду, находящемуся внутри этой поверхности.

Через поток: поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность, пропорционален полному заряду, заключенному внутри этой поверхности.

Найдем коэффициент пропорциональности. Сначала рассмотрим заряд вне по-



верхности. Для узкого конуса имеем: $\Phi_1 = E_1 S_1 \cos \alpha_1 = -E_1 S_{1\perp}$,

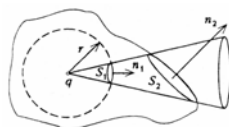
$\Phi_2 = E_2 S_2 \cos \alpha_2 = E_2 S_{2\perp}$, где $E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1^2}$, $E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_2^2}$.

Из подобия получаем

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{S_{1\perp}}{S_{2\perp}}.$$

Откуда, $\Phi_1 = -\Phi_2$.

Рассмотрим теперь заряд, находящийся внутри поверхности. Окружим заряд



сферой радиуса r . Рассуждая аналогично получаем, что $\Phi_1 = \Phi_2$, но поток через сферу $\Phi_1 = ES = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$. Итак

теорема Гаусса: поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен полному заряду, заключенному внутри этой поверхности, деленному на ϵ_0 : $\Phi = \frac{\sum q_{внутр}}{\epsilon_0}$.

3. Задачи.

1. Напряженность однородного электрического поля равна E . Чему равен поток напряженности электрического поля через квадрат со стороной l , плоскость которого расположена под углом 30° к направлению электрического поля?
2. Найти отрицательные и положительные потоки однородного электрического поля напряженности \vec{E} через замкнутую поверхность прямой трёхгранной призмы, высота которой h . Передняя грань призмы, ширина которой h , перпендикулярна \vec{E} , нижняя грань параллельна \vec{E} .
3. Поток напряженности электрического поля через плоскую поверхность, равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда σ , равен Φ . Чему равна электрическая сила, действующая на пластину в направлении, перпендикулярном её плоскости?